

# CFD pro tepelnou techniku I

## přednášky

### Metoda konečných objemů (MKO)

Pavel Zácha

zdroj: [Bakker, 2008], [Vodička, 2011], [Runchal, 2008], [Kozubková, 2008]

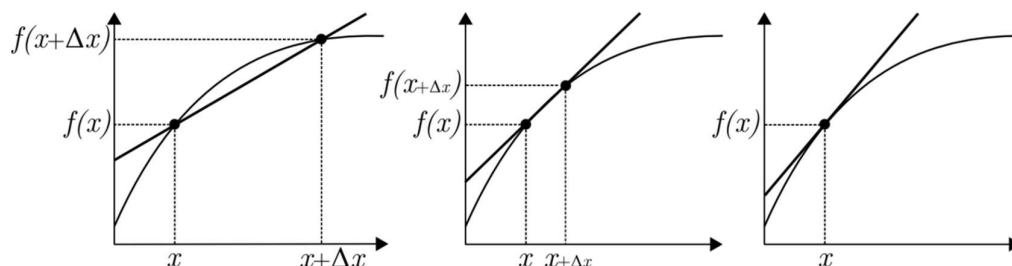
#### Historie

##### 1910 – Metoda konečných diferencí (MKD)

- zřejmě nestarší způsob řešení parciálních diferenciálních rovnic (DR)
- považováno za první výpočetní metodu „Computational Fluid Dynamics“ (CFD)
- ze známých OP počítáme postupně další body mřížky nahrazením DR ekv. diferenčním podílem:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$  – derivace funkční hodnoty v bodě  $a$ ,  $f(a)$  – funkční hodnota v bodě  $a$ ,  $h$  – délka kroku



## Historie

### 1910 – Metoda konečných diferencí (MKD)

- krok  $h$  lze nahradit časovou změnou (tzv. dopředná diference)
- derivace v Taylorově polynomu:

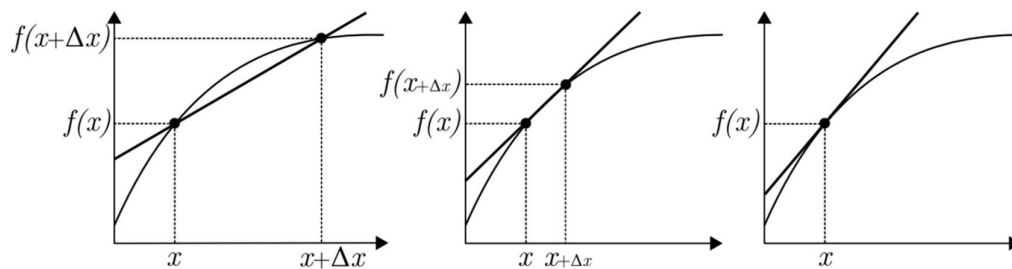
$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots$$

- funkční hodnota derivace je pak:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{R(a)}{h}$$

$R(a)$  – chyba měření

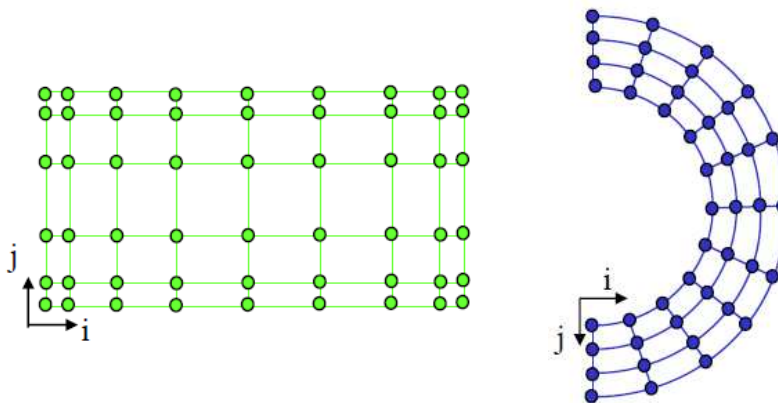
- chyba měření  $R(a)$  se do výpočtu nezahrnuje (tzv. diskretizační chyba)
- řídicí rovnice (diferenciální forma) jsou diskretizovány (převedeny do algebraické formy)



## Historie

### 1910 – Metoda konečných diferencí (MKD)

- diskretizace: rozdělení prostoru na mřížky kontrolních indexovaných bodů  $(i, j, k)$  v osách  $x, y, z$
- existuje několik metod výpočtu dalších bodů, např.
  - explicitní metoda
  - implicitní metoda
  - Crank-Nicolsonova metoda



indexace kontrolních bodů

# Historie

## 1910 – Metoda konečných diferencí (MKD)

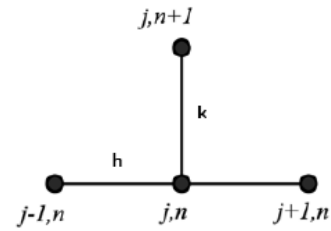
- vhodná pro řešení spojená s teplotním přenosem
- obtížná implementace OP, nutnost vysoké hustoty časové sítě

### Explicitní metoda

- dopředná diference + centrální diference 2. řádu

$$u_j^{n+1} = \left(1 - 2\left(\frac{k}{h^2}\right)\right)u_j^n + \frac{k}{h^2}u_{j-1}^n + \frac{k}{h^2}u_{j+1}^n$$

- $u$  – zkoumaná veličina;  $k$  – časový krok;  $h$  – délka kroku
- vztah  $k/h^2$  se nahrazuje koeficientem  $r$
- podmínka konvergence a num. stability je na velikosti  $r$  silně závislá - snaha, aby  $r \in (0; 0,5)$

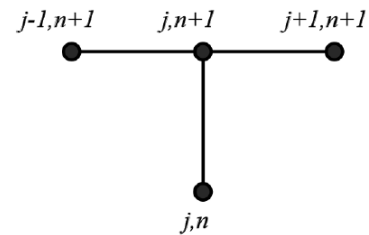


### Implicitní metoda

- zpětná diference + centrální diference 2. řádu

$$u_j^n = \left(1 + 2\left(\frac{k}{h^2}\right)\right)u_j^{n+1} - \frac{k}{h^2}u_{j-1}^{n+1} - \frac{k}{h^2}u_{j+1}^{n+1}$$

- je vždy konvergentní a numericky stabilní
- výpočetně náročnější

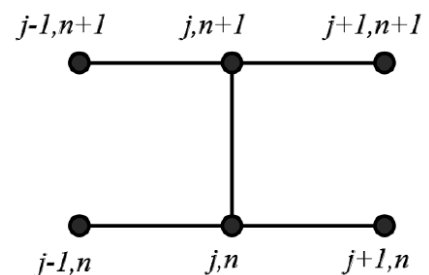


# Historie

## 1910 – Metoda konečných diferencí (MKD)

### Crank-Nicolsonova metoda

- kombinuje explicitní a implicitní metodu
- využívá diference  $n+1/2$  a centrální diferenci 2. řádu
- je vždy konvergentní a numericky stabilní
- velikost odchylky roste v závislosti na vzdálenosti bodu od kraje => nutnost použít velmi malý časový krok



### První vizualizace výpočtů

- 1953 – Kawagutiho vizualizace vzduchu obtékajícího válec
- výpočet pomocí MKD s Navier-Stokesovými rovnicemi
- vytvoření obrazu – 20h/týdně x 18 měsíců



Kawagutiho vizualizace

**Výhoda MKD:** jednoduchá implementace

**Nevýhody MKD:** omezeno na jednoduché sítě  
na hrubé sítě nefungují zákony zachování

## Historie

### 1943 – Metoda konečných prvků (MKP)

- poprvé použita Courantem
- zdokonalená přeformulovaná MKD primárně pro výpočty napěťových charakteristik mechanických součástí (dodnes)
- v CFD výpočtech se objevila v 70. letech
- diskretizace v podstatě shodná s MKD; prostředek výpočtu parciálních DR
- **výhody:** vysoká přesnost i na hrubé síti  
vhodné pro viskózní proudění (převládající difúzní proudění)
- **nevýhody:** pomalé pro objemné případy  
není vhodná pro simulace turbulentního proudění

## Historie

### Další vyvíjené metody pro výpočty proudění

- 1952 – Panel method – obtékání profilů křídla vzduchem

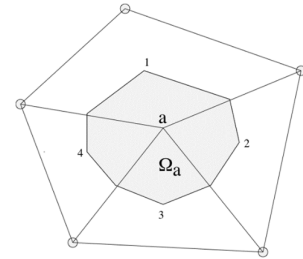
Národní laboratoř v Los Alamos

- vznik v rámci projektu Manhattan a vývoj vodíkové bomby  
=> základy vzniku CFD metod (computational fluid dynamics = výpočtová dynamika tekutin)
- 1955 – Particle in cell (PIC) – proudění stlačitelných pevných nebo tekutých látek a směsí
- 1965 – Marker and cell method (MAC) – proudění nestlačitelných tekutin, objevuje se 1. diskretizace oblasti do kubických mřížek
- 1966 – Fluid in cell (FLIC) – nástupce metody PIC
- **1968 – Metoda konečných objemů (MKO)**

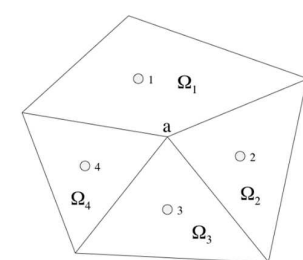


## Metoda konečných objemů (MKO)

- vnímání MKD jako fyzikálního problému:
  - v MKD byly popisovány hlavní (stavové) proměnné v jednotlivých uzlech
  - **koncept „upwind“** spojuje myšlenky MKD s „upwind“ metodou
    - ⇒ hlavní parametr pro výpočet - přenosy/změny proměnných
  - mřížka = soustava **nádrží** (kontrolních bodů) propojených **trubicemi** (sítí), později pojmenováno jako FVM (Finite Volume Method)
  - nevypočítává se přenos látky z vektoru rychlosti, ale z toho, kolik látky „prochází trubicemi“
    - ⇒ nově možnost volby např. Reynoldsova čísla
  - přechod na lépe vizualizovanou a pochopitelnou metodu - umístění kontrolního bodu do **středu obrazce** (vrcholově středěná mřížka)



buněčně středěná mřížka



vrcholově středěná mřížka

Metoda konečných objemů spočívá stručně řečeno ve třech základních bodech

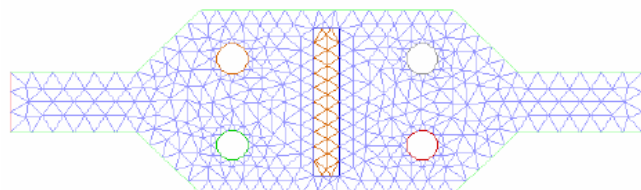
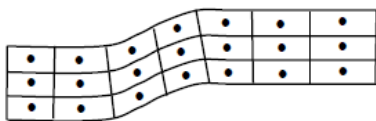
- dělení oblasti na diskrétní objemy užitím obecné křivočaré sítě
- bilancování neznámých veličin v individuálních konečných objemech a diskretizace
- numerické řešení diskretizovaných rovnic

Fluent definuje diskrétní konečné objemy užitím **non-staggered schematu**, kdy všechny proměnné jsou uchovávány ve středech konečných objemů.

(Kozubková, str. 35)

## Metoda konečných objemů (MKO)

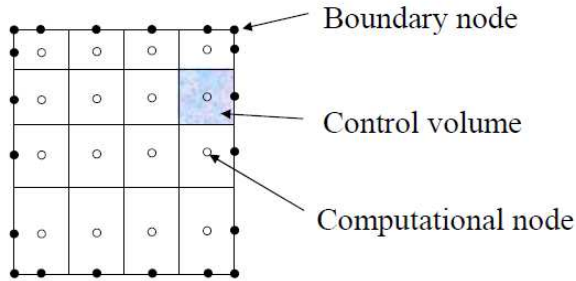
- základní metodologie:
  - rozdělení domény na kontrolní objemy
  - integrace diferenciálních rovnic přes celý kontrolní objem a aplikace teorému divergence
  - ke stanovení derivovaných členů jsou vyžadovány hodnoty na hraničních plochách
  - ⇒ přenos informací probíhá přes stěny a vypočítá se jako suma integrálů přes jednotlivé stěny
  - výsledkem je sada lineárních algebraických rovnic – jedna pro každý kontrolní objem
  - lze řešit iteračně i souběžně



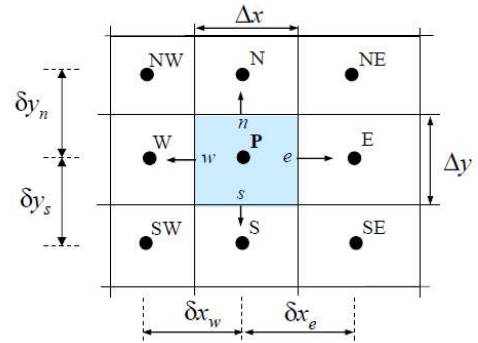
rozdělení domény na kontrolní objemy (buňky)

# Metoda konečných objemů (MKO)

- buňky a uzly
  - řešená oblast se rozděluje na konečný počet malých kontrolních objemů (buněk/cells) do tzv. (výpočtové) sítě
  - síť definuje hranice buněk, výpočetní uzly (nodes) leží ve středu buněk



dělení řešené oblasti na buňky



tok proměnných skrze hranice buněk

# Metoda konečných objemů (MKO)

- vývoj zejména v 70. a 80. letech
- 90. léta - vznik nestrukturovaných sítí (možnost tvořit síť bez kartézské indexace  $i,j,k$ )

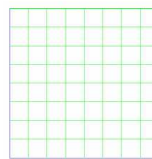
## výhody:

- odpadá omezení tvaru kontrolních objemů
- zákony zachování lze aplikovat i na hrubé sítě
- vyvinuty účinné iterační řešiče
- oproti MKP významně nižší nároky na paměť + vyšší rychlost výpočtu pro náročnější úlohy, např.:
  - o velké sítě
  - o velmi rychlé proudění
  - o turbulentní proudění
  - o proudění se zdrojovými členy (spalování)

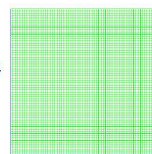
## nevýhoda:

- vyšší difúze při použití jednoduchých výpočetních metod

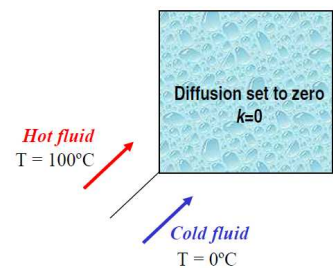
8 x 8



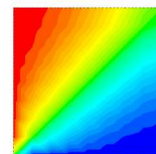
64 x 64



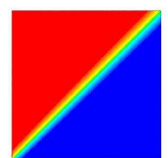
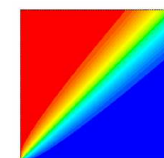
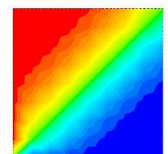
## Accuracy and false diffusion



First-order Upwind



Second-order Upwind



# Metoda konečných objemů (MKO)

## příklad použití – vedení tepla (1D prostor, v čase)

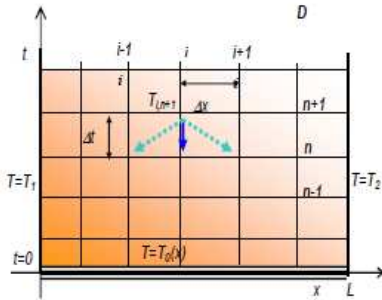
Řešte rovnici vedení tepla v tyči, danou parabolickou diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Řešení se hledá v obdélníku  $D(t, x)$ , viz obr. 1.13, musí splňovat podmínky:

počáteční podmínka  $T(x, 0) = T_0(x) = 20^\circ\text{C}$   $0(x) < L$

okrajová podmínka  $T(0, t) = T_1(t) = 80^\circ\text{C}$   
 $T(L, t) = T_2(t) = 20^\circ\text{C}$



obr. 1.13 Geometrie oblasti, okrajové podmínky, síť

Diferenční rovnice vedení tepla má tvar

$$\frac{T_{i,n+1} - T_{i,n}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1,n} + T_{i-1,n} - 2T_{i,n}}{\Delta x^2}$$

a po úpravě platí

$$T_{i,n+1} = T_{i,n} + \alpha \Delta t \frac{T_{i+1,n} + T_{i-1,n} - 2T_{i,n}}{\Delta x^2}$$

Tedy lze explicitně vyjádřit  $T_{i,n+1}$  pomocí hodnot v předchozím časovém kroku  $n$ . V tomto jednoduchém případě lze najít řešení v Excelu

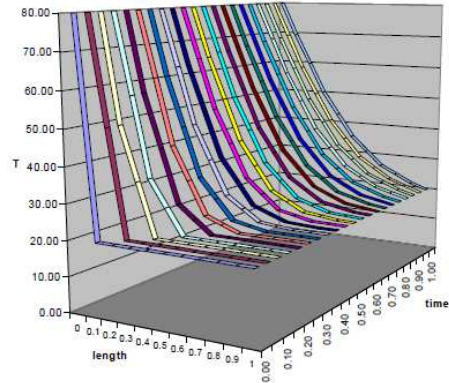
$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

Tabulka zadání parametrů pro iterační výpočet

$\alpha =$	0.1	$T(x=0) =$	80	coef =	0.5
$L =$	1	$T(x=L) =$	20	$\Delta x =$	0.1
$n =$	10	$T(t=0) =$	20	$\Delta t =$	0.05

time	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
BC 0	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00	80.00
0.1	20.00	50.00	50.00	57.50	57.50	61.25	61.25	63.59	63.59	65.23	65.23
0.2	20.00	20.00	35.00	35.00	42.50	42.50	47.19	47.19	50.47	50.47	52.93
0.3	20.00	20.00	20.00	27.50	27.50	33.13	33.13	37.34	37.34	40.63	40.63
0.4	20.00	20.00	20.00	20.00	23.75	23.75	27.50	27.50	30.78	30.78	33.59
0.5	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	21.88	21.88	24.22	24.22	26.56	26.56
0.6	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.94	20.94	22.34	22.34	23.93
0.7	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.47	20.47	21.29	21.29
0.8	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.23	20.23	20.70
0.9	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.12	20.12
BC 1	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00

Konvergence úlohy závisí na volbě časového a prostorového kroku. Dalším problémem je efektivní řešení této soustavy algebraických rovnic.



obr. 1.14 Grafické zobrazení řešení v Excelu.

## Literatura

[Bakker, 2008] Bakker, A.: Applied Computational Fluid Dynamics, Lectures; 2008. [Citace: 24. 2. 2013] <http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/>

[Vodička, 2011] Vodička, V.: Přehled a vývoj CFD metod. Bakalářská práce, VUT v Brně, 2011

[Runchal, 2008] Runchal, D.; Akshai, K.: BRIAN SPALDING: CFD & REALITY. CHAM. [Online] 2008. 11 16. [Citace: 24. 2. 2013] [www.cham.co.uk/docs/cht-08-012\\_runchal\\_final\\_jun\\_08.pdf](http://www.cham.co.uk/docs/cht-08-012_runchal_final_jun_08.pdf)

[Kozubková, 2008] Kozubková, M.: Modelování proudění tekutin FLUENT, CFX. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 2008. 142 s.